UNIDADE

4

Sistemas de amortização de empréstimo e financiamento

Objetivo

Nesta Unidade, você será levado a: diferenciar os dois tipos de sistema de amortização; elaborar a planilha do empréstimo ou plano de amortização (com e sem carência) e localizar nela o estado da dívida em um período qualquer; e, por fim, calcular o valor do saldo devedor, o valor da parcela de amortização, o valor da parcela de juros e o valor da prestação em um período qualquer do financiamento.

Sistemas de amortização de empréstimo e financiamento

Caro estudante!

A Unidade 4 vai tratar dos sistemas de amortização de empréstimo e financiamento. Leia com atenção os conceitos e exemplos aqui apresentados, e faça as atividades propostas ao longo da Unidade. Em caso de dúvidas, busque auxílio junto ao seu tutor.

No Brasil, os mercados comercial e financeiro adotam diversos sistemas de amortização de empréstimos. Eles diferem pelo critério de devolução do principal (PV), e pelo cálculo e pagamento dos juros (J).

Nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor. Isto significa que consideraremos apenas o regime de capitalização composta, pois, se os juros são calculados deste modo, o não-pagamento de juros em um dado período levará a um saldo devedor maior, sendo calculado juro sobre juro.

Para melhor entendimento desta Unidade, daremos os principais conceitos de uso corrente nas operações de empréstimos e financiamentos, a saber:

- **credor**: aquele que concede o empréstimo ou financiamento;
- **devedor ou mutuário**: aquele que recebe o empréstimo ou financiamento;
- **taxa de juros**: taxa contratada entre as partes;
- **prestação**: soma da amortização, acrescida dos juros e outros encargos financeiros pagos em um dado período;
- **amortização**: refere-se às parcelas de devolução do principal (capital emprestado);

- **prazo de amortização**: intervalo de tempo durante o qual serão pagas as amortizações;
- **saldo devedor**: trata-se do estado da dívida (débito) em determinado instante de tempo;
- **IOF**: Imposto sobre Operações Financeiras;
- **prazo de carência**: corresponde ao período compreendido entre a primeira liberação do empréstimo ou financiamento e o pagamento da primeira amortização;
- **prazo total**: considera-se a soma do prazo de carência com o prazo de amortização; e
- **planilha**: quadro onde são colocados os valores referentes ao empréstimo ou financiamento, constituído de várias colunas, que apresentam, após cada pagamento, a parcela de juros pagos, a amortização, a prestação, os encargos financeiros (IOF, aval, comissões, taxa de abertura de crédito, etc.) e o saldo devedor.

As formas de pagamento dos empréstimos são chamadas **sistemas de amortização**. Os sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos tratam da forma pela qual o principal e os encargos financeiros (juros, IOF, TAC, etc.) são restituídos ao credor do capital.

Dentre os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos, abordaremos o sistema de amortização constante e o Sistema Francês, ou Sistema Price.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

No Sistema de Amortização Constante (SAC), as parcelas de amortização do principal são sempre iguais (ou constantes). O valor da amortização (A) é calculado através da divisão do capital emprestado (PV) pelo número de amortizações (n). Os juros são calculados, a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada pelo saldo devedor existente sobre o período anterior, assumindo valores decres-

centes nos períodos. A prestação, a cada período, é igual à soma da amortização e dos encargos financeiros (juros, comissões, etc.), sendo periódica, sucessiva e decrescente em progressão aritmética, de razão igual ao produto da taxa de juros pela parcela de amortização.

Assim, $A = \frac{PV}{n}$; saldo devedor de ordem t, $P_t = P_{t-1} - A$;

Parcela de juros de ordem t, $J_t = i \text{ x } P_{t-1}$, para $t = 1, 2, 3, ..., n$.

Prestação (PMT) = amortização + encargos financeiros.

Razão (G) da progressão aritmética (PA) = $G = i$ x A.

A partir de agora, você vai acompanhar a resolução de alguns exercícios. Nosso intuito é que você compreenda a resolução de exercícios sobre o SAC e potencialize seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 4.1 A empresa Felicidade pede emprestado R$ 100.000,00 ao Banco Boa Praça, que entrega o capital no ato e sem carência. Sabendo-se que os juros serão pagos mensalmente, a taxa de juros é de 4,5% *am* e o principal será amortizado em dez parcelas mensais, construir a planilha do empréstimo.

Resolução: dados do problema: $PV = 100.000,00$; $i = 4,5\%$ *am* = 0,045 *am*; $n = 10$ meses.

Inicialmente, você calcula o valor da amortização constante, assim:

$$A = \frac{PV}{n} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{100.000,00}{10} = 10.000,00/ \ Mês.$$

Construindo a planilha do empréstimo (em R$), tem-se:

Mês	Saldo Devedor (P_t)	Amortização (A)	Juros (J_t)	Prestação (PMT_t)
0	100.000,00			
1	90.000,00	10.000,00	4.500,00	14.500,00
2	80.000,00	10.000,00	4.050,00	14.050,00
3	70.000,00	10.000,00	3.600,00	13.600,00
4	60.000,00	10.000,00	3.150,00	13.150,00
5	50.000,00	10.000,00	2.700,00	12.700,00
6	40.000,00	10.000,00	2.250,00	12.250,00
7	30.000,00	10.000,00	1.800,00	11.800,00
8	20.000,00	10.000,00	1.350,00	11.350,00
9	10.000,00	10.000,00	900,00	10.900,00
10	–	10.000,00	450,00	10.450,00
Total	–	100.000,00	24.750,00	124.750,00

Como você pode ver, a planilha é auto-explicativa. A seguir, mostraremos o procedimento no cálculo de diversos valores:

1) O cálculo do saldo devedor de ordem t, para $t = 4$, é

$P_t = P_{t-1} - A \Rightarrow P_4 = P_3 - A = 70.000{,}00 - 10.000{,}00 = 60.000{,}00.$

2) O cálculo do juro de ordem t, para $t = 7$, é

$J_t = i \times P_{t-1} \Rightarrow J_7 = 0{,}045 \times P_6 = 0{,}045 \times 40.000{,}00 = 1.800{,}00.$

3) O cálculo da prestação de ordem t, para $t = 5$, é

$PMT_5 = A + J_5 = 10.000{,}00 + 2.700{,}00 = 12.700{,}00.$

Cálculo dos valores do SAC em um período qualquer

No Sistema de Amortização Constante, muitas vezes é necessário o cálculo dos valores para algum determinado período, sem a necessidade de elaborar a planilha completa. Esses cálculos podem ser feitos usando o formulário abaixo.

- Valor do saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem t

$$P_t = PV \times \left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

- Valor da parcela de juros da prestação de ordem t

$$J_t = i \times PV \times \left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$$

- Valor da prestação de ordem t

$$PMT_t = \frac{PV}{n} \times \left[1 + i\left(n - t + 1\right)\right].$$

- Soma dos juros acumulados do primeiro período até o período de ordem t

$$\sum_{k=1}^{t} J_k = \frac{i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n}.$$

- Soma das prestações acumuladas do primeiro período até o período de ordem t

$$\sum_{k=1}^{t} PMT_k = \frac{2 \times PV \times t + i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n}$$

Exemplo 4.2 Usando os valores do exemplo 4.1, calcular:

a) o saldo devedor após o pagamento da sétima prestação;

b) a parcela de juros da quinta prestação;

c) o valor da sétima prestação;

d) soma dos juros das seis primeiras prestações; e

e) a soma das quatro primeiras prestações.

Resolução: dados do problema: PV = 100.000,00; i = 4,5% *am* = 0,045 *am*; n = 10 meses.

Respondendo a letra a, temos:

Pela fórmula $P_t = PV \times \left(1 - \frac{t}{n}\right) \Rightarrow P_7 = 100.000,00 \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) =$

P_t = 100.000,00 x 0,30 = 30.000,00.

Respondendo a letra b, temos:

Pela fórmula $J_t = i \times PV \times \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) \Rightarrow$

$$J_5 = 0,045 \times 100.000,00 \times \left(1 - \frac{5-1}{10}\right) =$$

$$J_5 = 0,045 \times 100.000,00 \times \left(1 - \frac{4}{10}\right) =$$

J_5 = 0,045 x 100.000,00 × 0,6 = 2.700,00.

Respondendo a letra c, temos:

Pela fórmula $PMT_t = \frac{PV}{n} \times \left[1 + i\left(n - t + 1\right)\right] \Rightarrow$

$$PMT_7 = \frac{100.000,00}{10} \times \left[1 + 0,045 \times \left(10 - 7 + 1\right)\right] =$$

PMT_7 = 10.000,00 × [1+ 0,045 ×(10 – 7 + 1)] =

PMT_7 = 10.000,00 × [1+ 0,045 ×4] = 10.000,00 × 1,18 =

PMT_7 = 11.800,00.

Para responder a letra d, pela fórmula $\sum_{k=1}^{t} J_k = \frac{i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n}$ temos:

$$\sum_{k=1}^{6} J_k = \frac{0,045 \times 6 \times 100.000,00 \times \left(2 \times 10 - 6 + 1\right)}{2 \times 10} =$$

$$\sum_{k=1}^{6} J_k = \frac{0,045 \times 6 \times 100.000,00 \times 15}{20} =$$

$$\sum_{k=1}^{6} J_k = \frac{405.000,00}{20} = 20.250,00.$$

Agora, para responder a letra e, utiliza-se a fórmula:

$$\sum_{k=1}^{t} PMT_k = \frac{2 \times PV \times t + i \times t \times PV \times (2n - t + 1)}{2n}$$, e você tem:

$$\sum_{k=1}^{4} PMT_k = \frac{2 \times 100.000{,}00 \times 4 + 0{,}045 \times 4 \times 100.000{,}00 \times (2 \times 10 - 4 + 1)}{2 \times 10} =$$

$$\sum_{k=1}^{4} PMT_k = \frac{800.000{,}00 + 18.000{,}00 \times 17}{20} = \frac{1.106.000{,}00}{20} = 55.300{,}00$$

Observação 4.1 Confira os valores encontrados acima com os valores da planilha do empréstimo do exemplo 4.1.

Exemplo 4.3 Um financiamento de R$ 150.000,00 foi contratado à taxa efetiva de juros de 51,106866% *aa* e será pago em cinco anos, em prestações mensais pelo Sistema de Amortização Constante. Determinar:

a) o juro a ser pago no 28º mês;

b) o saldo devedor após o pagamento da metade do financiamento;

c) o valor da 48ª prestação; e

d) o total de juros pagos até a 35ª prestação.

Resolução: dados do problema: PV = 150.000,00; n = 5 anos = 60 meses; i = 51,106866% *aa*.

Inicialmente, você calcula a taxa equivalente ao período do pagamento das prestações mensais, ou seja:

$$i = (1{,}51106866)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1{,}035 - 1 = 0{,}035 \quad \Rightarrow \quad i = 3{,}5\% \; am.$$

Agora, respondendo, temos:

a) $J_t = i \times PV \times \left(1 - \frac{t-1}{n}\right)$

$$J_{28} = 0{,}035 \times 150.000{,}00 \times \left(1 - \frac{28-1}{60}\right) =$$

J_{28} = 0,035 × 150.000,00 × (1–0,45) = 2.887,50.

Portanto, o juro a ser pago no 28º mês é R$ 2.887,50.

b) $P_t = PV \times \left(1 - \frac{t}{n}\right)$

$$P_{30} = 150.000,00 \times \left(1 - \frac{30}{60}\right) = 75.000,00.$$

Portanto, o saldo devedor após o pagamento da metade do financiamento é R$ 150.000,00.

c) $PMT_t = \frac{PV}{n} \times \left[1 + i\left(n - t + 1\right)\right] \Rightarrow$

$$PMT_{48} = \frac{150.000,00}{60} \times \left[1 + 0,035 \times \left(60 - 48 + 1\right)\right] =$$

PMT_{48} = 2.500,00 × [1+0,035×13] = 2.500,00 × 1,455 =

PMT_{48} = 3.637,50.

Portanto, o valor da 48ª prestação é R$ 3.637,50.

d) $\sum_{k=1}^{t} J_k = \frac{i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{35} J_k = \frac{0,035 \times 35 \times 150.000,00 \times \left(2 \times 60 - 35 + 1\right)}{2 \times 60} =$$

$$\sum_{k=1}^{35} J_k = \frac{183.750,00 \times 86}{120} = 131.687,50.$$

Portanto, o total de juros pagos até a 35ª prestação é R$ 131.687,50.

Exemplo 4.4 O Banco Boa Vida emprestou R$ 85.000,00 à empresa Sorriso, pelo SAC, entregue no ato, nas seguintes condições:

- taxa efetiva de juros = 90,120749% *aa*;
- prazo total do financiamento = 12 meses;
- prazo de carência = cinco meses (com juros pagos neste período); e
- IOF = 1,25% do valor do empréstimo, pago quando da liberação dos recursos.

Elaborar a planilha do empréstimo.

Resolução: dados do problema: PV = 85.000,00; i = 90,120749% *aa; m* = 5 meses (juros pagos na carência); Prazo Total do Financiamento (PTF) = 12 meses; $PTF = n + m \Rightarrow 12 = n + 5 \Rightarrow n = 7$ meses.

Calculando a taxa equivalente ao período das prestações mensais, você tem:

$$i = (1{,}90120749)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1{,}055 - 1 = 0{,}055 \Rightarrow i = 5{,}5\%\, am.$$

Cálculo do IOF, IOF = 1,25% de 85.000,00 = 1.062,50.

Planilha do empréstimo (em R$):

Mês	P_t	A	J_t	IOF	PMT_t
0	85.000,00	–	–	1.062,50	1.062,50
1	85.000,00	–	4.675,00	–	4.675,00
2	85.000,00	–	4.675,00	–	4.675,00
3	85.000,00	–	4.675,00	–	4.675,00
4	85.000,00	–	4.675,00	–	4.675,00
5	85.000,00	–	4.675,00	–	4.675,00
6	72.857,14	12.142,86	4.675,00	–	16.817,86
7	60.714,29	12.142,86	4.007,14	–	16.150,00
8	48.571,43	12.142,86	3.339,29	–	15.482,14
9	36.428,57	12.142,86	2.671,43	–	14.814,29
10	24.285,71	12.142,86	2.003,57	–	14.146,43
11	12.142,86	12.142,86	1.335,71	–	13.478,57
12	–	12.142,86	667,86	–	12.810,71
Total	–	85.000,00	42.075,01	1.062,50	128.137,51

Observação 4.2. Nos sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos, vamos trabalhar com rendas diferidas postecipadas.

Exemplo 4.5 O banco Boa Vida emprestou R$ 85.000,00 à empresa Sorriso, pelo SAC, entregue no ato, nas seguintes condições:

- taxa efetiva de juros = 90,120749% *aa*;
- prazo total do financiamento = 12 meses;

- prazo de carência = cinco meses (com juros capitalizados neste período e incorporados ao saldo devedor para amortização); e
- IOF = 1,25% do valor do empréstimo, pago quando da liberação dos recursos.

Elaborar a planilha do empréstimo.

Resolução: dados do problema: *PV* = 85.000,00; *i* = 90,120749% *aa* = 5,5% *am; m* = 5 meses (juros capitalizados na carência); *PTF* = 12 meses; *n* = 7 meses.

Cálculo do IOF, *IOF* = 1,25% de 85.000,00 = 1.062,50.

Planilha do empréstimo (em R$):

Mês	P_t	A	J_t	IOF	PMT_t
0	85.000,00	–	–	1.062,50	1.062,50
1	89.675,00	–	–	–	–
2	94.607,13	–	–	–	–
3	99.810,52	–	–	–	–
4	105.300,10	–	–	–	–
5	111.091,60 (*)	–	–	–	–
6	95.221,37	15.870,23	6.110,04	–	21.980,27
7	79.351,14	15.870,23	5.237,18	–	21.107,40
8	63.480,91	15.870,23	4.364,31	–	20.234,54
9	47.610,69	15.870,23	3.491,45	–	19.361,68
10	31.740,46	15.870,23	2.618,59	–	18.488,82
11	15.870,23	15.870,23	1.745,73	–	17.615,95
12	0	15.870,23	872,86	–	16.743,09
Total	–	111.091,60	24.440,15	1.062,50	136.594,25

(*) O saldo devedor do mês 5 é $P_5 = 85.000,00 \times (1,055)^5 =$ 111.091,60.

Exemplo 4.6 Um empréstimo no valor de R$ 25.000,00 deverá ser amortizado pelo SAC em 48 meses a uma taxa de juros de 4,5% *am* e uma carência de nove meses com juros capitalizados neste período. Calcular:

a) o valor da 28ª prestação das 48;

b) o valor da 35ª parcela de juros das 48;

c) o total de juros pagos das 48 parcelas; e

d) o valor do saldo devedor após o pagamento da 40ª prestação das 48.

Resolução: dados do problema: PV = 25.000,00; i = 4,5% *am* = 0,045% *am;* n = 48 meses; m = 9 meses (juros capitalizados na carência).

Inicialmente, você calcula o valor do empréstimo corrigido em 4,5% *am* até o vencimento do período da carência (nove meses), assim:

$P_9 = 25.000,00 \times (1,045)^9 = 37.152,38.$

Este valor, R$ 37.152,38, será amortizado em 48 meses a 4,5% *am* pelo SAC.

Agora, respondendo, temos:

a) $PMT_t = \frac{PV}{n} \times \left[1 + i\left(n - t + 1\right)\right] \Rightarrow$

$$PMT_{28} = \frac{37.152,38}{48} \times \left[1 + 0,045 \times \left(48 - 28 + 1\right)\right] =$$

$PMT_{28} = 774,01 \times [1+0,045 \times 21] = 774,01 \times 1,945 =$

$PMT_{28} = 1.505,45.$

Portanto, o valor da 28ª prestação das 48 é R$ 1.505,45.

b) $J_t = i \times PV \times \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) \Rightarrow$

$$J_{35} = 0,045 \times 37.152,38 \times \left(1 - \frac{35-1}{48}\right) =$$

$J_{35} = 1.671,86 \times 0,292 = 487,62.$

Portanto, o valor da 35ª parcela de juros das 48 é R$ 487,62.

c) $\sum_{k=1}^{t} J_k = \frac{i \times t \times PV \times \left(2n - t + 1\right)}{2n} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{48} J_k = \frac{0,045 \times 48 \times 37.152,38 \times \left(2 \times 48 - 48 + 1\right)}{2 \times 48} =$$

$$\sum_{k=1}^{48} J_k = \frac{80.249,14 \times 49}{96} = 40.960,50.$$

Portanto, o total de juros pagos das 48 parcelas é R$ 40.960,50.

d) $P_t = PV \times \left(1 - \frac{t}{n}\right) \Rightarrow P_{40} = 37.152,38 \times \left(1 - \frac{40}{48}\right) = 6.192,06.$

Portanto, o valor do saldo devedor após o pagamento da 40ª prestação das 48 é R$ 6.192,06.

Verifique o quanto você entendeu sobre o Sistema de Amortização Constante resolvendo as atividades propostas a seguir.

Atividades de aprendizagem – 1

1) Um empréstimo de R$ 80.000,00 deve ser devolvido pelo SAC em cinco parcelas semestrais de amortização, com dois semestres de carência, isto é, a primeira parcela é paga no terceiro semestre, e os juros são pagos no período de carência à taxa de juros de 7% *as*. Elaborar a planilha do empréstimo.

2) Um imóvel é vendido por R$ 140.000,00, sendo 15% de entrada e o restante financiado pelo SAC em dez anos, com pagamento mensal, e a taxa de juros cobrada na operação é 2,5% *am*. Determine:

a) o valor da primeira e da última prestações;

b) a soma das 40 primeiras prestações;

c) a soma dos juros pagos até a liquidação do débito; e

d) o valor do saldo devedor após o pagamento da metade do financiamento.

3) Um empréstimo foi amortizado pelo SAC, a uma taxa 2,75% a em 72 meses, sem carência. Calcular o valor do empréstimo, sabendo-se que a soma das 35 primeiras prestações é de R$ 25.940,35.

4) Um empréstimo no valor de R$ 75.000,00 deverá ser amortizado pelo SAC em 36 meses a uma taxa de juros de 3,5% *am* e uma carência de nove meses com juros capitalizados neste período. Calcular:

a) o valor da 21ª prestação das 36;

b) o valor da 19ª parcela de juros das 36;

c) o total de juros pagos até a liquidação do débito das 36; e

d) o valor do saldo devedor após o pagamento da 24ª prestação das 36.

Sistema Francês de amortização ou Sistema Price

O Sistema Francês foi desenvolvido pelo matemático e físico belga Simon Stevin no Século XVI. Foi utilizado pelo economista e matemático inglês Richard Price, no Século XVIII, no cálculo previdenciário inglês da época, e ficou conhecido no Brasil como Sistema Price.

O Sistema Francês ou Sistema Price é o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. Nesse sistema, o mutuário obriga-se a devolver o principal mais os juros em prestações iguais e periódicas, a partir do instante em que começam a ser pagas. A amortização é cres-

Para saber mais

***Simon Stevin** – matemático, mecânico e engenheiro militar, flamengo, nascido em Bruges, a quem se deve a popularização do uso do sistema decimal de frações, o que viabilizou o uso divisionário das moedas, dos pesos e medidas em geral. Fonte: http://www.brasilescola.com/biografia/simon-stevin.htm

***Richard Price** – reverendo presbiteriano, criador da Tabela Price. Um método usado em amortização de empréstimo construído por juro composto (anatocismo), caracterizado por prestações iguais e desenvolvido em 1771. Fonte: Wikipédia (2007).

cente em progressão geométrica de razão igual a (1+i), e o juro é decrescente.

Suponha-se o empréstimo (PV), a ser pago em (n) prestações iguais (PMT), a uma taxa de juros (i) (expressa na mesma unidade de tempo do período dos pagamentos), pelo Sistema Price. As prestações são calculadas como se fossem os termos (PMT) de uma renda imediata, cujo valor presente é (PV), conforme estudamos na Unidade 3. Assim, o valor das prestações iguais é dado pela fórmula:

$$PMT = PV \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

A partir de agora, você vai acompanhar a resolução de alguns exercícios. Nosso intuito é que você compreenda a resolução de exercícios sobre o Sistema Price e potencialize seu entendimento para os exercícios e/ou desafios propostos posteriormente.

Exemplo 4.7 A empresa Felicidade pede emprestados R$ 100.000,00 ao Banco Boa Praça, que entrega o capital no ato e sem carência. Sabendo-se que os juros serão pagos mensalmente, a taxa de juros é de 4,5% *am,* e o principal será amortizado em dez parcelas mensais, construir a planilha do empréstimo.

Resolução: dados do problema: PV = 100.000,00; i = 4,5% *am* = 0,045% *am;* n = 10 meses.

Inicialmente, você calcula o valor das prestações, obtendo:

$$PMT = PV \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow PMT = 100.000,00 \times \frac{0,045}{1-(1+0,045)^{-10}} =$$

$$PMT = 100.000,00 \times \frac{0,045}{1-(1,045)^{-10}} = 100.000,00 \times \frac{0,045}{1-0,64393} = 12.637,88 / Mês.$$

Construindo a planilha do empréstimo, você tem:

Planilha do empréstimo (em R$):

Mês	P_t	A_t	J_t	PMT
0	100.000,00	–	–	–
1	91.862,12	8.137,88	4.500,00	12.637,88
2	83.358,04	8.504,08	4.133,80	12.637,88
3	74.471,27	8.886,77	3.751,11	12.637,88
4	65.184,60	9.286,67	3.351,21	12.637,88
5	55.480,03	9.704,57	2.933,31	12.637,88
6	45.338,75	10.141,28	2.496,60	12.637,88
7	34.741,11	10.597,64	2.040,24	12.637,88
8	23.666,58	11.074,53	1.563,35	12.637,88
9	12.093,66	11.572,88	1.065,00	12.637,88
10	0	12.093,66	544,22	12.637,88
Total	–	100.000,00	26.378,80	126.378,80

Como você pode ver, a planilha é auto-explicativa. A seguir, mostraremos o procedimento no cálculo de diversos valores:

1) O cálculo do saldo devedor de ordem t, para $t = 2$, é

$P_t = P_{t-1} - A_t \Rightarrow P_2 = P_1 - A_2 = 91.862,12 - 8.504,08 = 83.358,04.$

2) O cálculo do juro de ordem t, para $t = 4$, é

$J_t = i \times P_{t-1} \Rightarrow J_4 = 0,045 \times P_3 = 0,045 \times 74.471,27 = 3.351,21.$

3) O cálculo da prestação de ordem t, para $t = 5$, é

$PMT_5 = PMT = A_5 + J_5 = 9.704,57 + 2.933,31 = 12.637,88.$

4) O cálculo da amortização de ordem t, para $t = 6$, é

$A_t = PMT_t - J_t \Rightarrow A_6 = PMT_6 - J_6 = 12.637,88 - 2.496,60 = 10.141,28.$

Cálculo dos valores do Price em um período qualquer

No Sistema Francês ou Sistema Price, muitas vezes é necessário o cálculo dos valores para algum determinado período, sem a necessidade de elaborar a planilha. Esses cálculos podem ser feitos usando o formulário abaixo.

- **Valor do saldo devedor de ordem *t***

$$P_t = PV \times \frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- **Valor da parcela de juros de ordem *t***

$$J_t = PV \times i \times \frac{1-(1+i)^{-(n-t+1)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- **Valor da primeira parcela de amortização**

$$A_1 = \frac{PV \times I}{(1+i)^n - 1}.$$

- **Valor da parcela de amortização de ordem *t***

$$A_t = \frac{PV \times i \times (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1}.$$

- **Soma das amortizações do 1º período até o período de ordem *t***

$$\sum_{K=1}^{t} A_k = PV \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1}\right].$$

- **Soma dos juros acumulados do 1º período até o período de ordem *t***

$$\sum_{K=1}^{t} J_k = PV \times \left[\frac{i \times t \times (1+i)^n - \left[(1+i)^t - 1\right]}{(1+i)^n - 1}\right].$$

Exemplo 4.8 Usando os valores do Exemplo 4.7, calcular:

a) o saldo devedor após o pagamento da sexta prestação;

b) a parcela de juros da quinta prestação;

c) o valor da sétima parcela de amortização;

d) a soma dos juros das quatro primeiras prestações; e

e) a soma das cinco primeiras parcelas de amortização.

Resolução: Dados do problema: PV = 100.000,00; i = 4,5% am = 0,045% am; n = 10 meses.

Para responder a letra a, pela fórmula $P_t = PV \times \frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{1-(1+i)^{-n}}$, temos:

$$P_6 = 100.000,00 \times \frac{1-(1+0,045)^{-(10-6)}}{1-(1+0,045)^{-10}} \Rightarrow P_6 = 100.000,00 \times \frac{1-(1,045)^{-4}}{1-(1,045)^{-10}} =.$$

$$P_6 = 100.000,00 \times \frac{1-0,8386}{1-0,6439} = 100.000,00 \times \frac{0,1614}{0,3561} =$$

P_6 = 100.000,00 × 0,453387 = 45.338,75.

Para responder a letra b, pela fórmula $J_t = PV \times i \times \frac{1-(1+i)^{-(n-t+1)}}{1-(1+i)^{-n}}$,

vem:

$$J_5 = 100.000,00 \times 0,045 \times \frac{1-(1+0,045)^{-(10-5+1)}}{1-(1+0,045)^{-10}} =$$

$$J_5 = 100.000,00 \times 0,045 \times \frac{1-(1,045)^{-6}}{1-(1,045)^{-10}} = 4.500,00 \times \frac{1-0,76790}{1-0,64393} =$$

J_5 = 4.500 × 0,65185 = 2.933,31.

Agora, para responder a letra c, pela fórmula $A_t = \frac{PV \times i \times (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1}$,

vem:

$$A_7 = \frac{100.000,00 \times 0,045 \times (1+0,045)^{7-1}}{(1+0,045)^{10}-1} = \frac{100.000,00 \times 0,045 \times (1,045)^6}{(1,045)^{10}-1} =$$

$$A_7 = \frac{4.500,00 \times 1,30226}{1,55297-1} = \frac{5.860,17}{0,55297} = 10.597,64.$$

Para responder a letra d, pela fórmula:

$$\sum_{K=1}^{t} J_k = PV \times \left[\frac{i \times t \times (1+i)^n - \left[(1+i)^t - 1\right]}{(1+i)^n - 1} \right], \text{ temos:}$$

$$\sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000,00 \times \left[\frac{0,045 \times 4 \times (1+0,045)^{10} - \left[(1+0,045)^4 - 1\right]}{(1+0,045)^{10} - 1} \right] =$$

$$\sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000,00 \times \left[\frac{0,045 \times 4 \times (1,045)^{10} - \left[(1,045)^4 - 1\right]}{(1,045)^{10} - 1} \right] =$$

$$\sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000,00 \times \left[\frac{0,18 \times 1,55297 - \left[1,19252 - 1\right]}{1,55297 - 1} \right] =$$

$$\sum_{K=1}^{4} J_k = 100.000,00 \times \left[\frac{0,27953 - 0,19252}{0,155297} \right] = 100.000,00 \times 0,15736 =$$

$$\sum_{K=1}^{4} J_k = 15.736,12.$$

Finalmente, para responder a letra e, pela fórmula $\sum_{K=1}^{t} A_k = PV \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^n - 1} \right]$, temos:

$$\sum_{K=1}^{5} A_k = 100.000,00 \times \left[\frac{(1+0,045)^5 - 1}{(1+0,045)^{10} - 1} \right] = 100.000,00 \times \left[\frac{(1,045)^5 - 1}{(1,045)^{10} - 1} \right] =$$

$$\sum_{K=1}^{5} A_k = 100.000,00 \times \frac{1,24618 - 1}{1,55297 - 1} = 100.000,00 \times 0,44520 = 44.519,97.$$

Observação 4.3 Confira os valores encontrados acima com os valores da planilha do empréstimo do Exemplo 4.7.

Observação 4.4 Quando usamos o Sistema ou a Tabela Price, e se a taxa de juros for **anual**, com pagamento mensal, semestral ou trimestral, usamos a taxa **proporcional** ao período de pagamento.

Exemplo 4.9 Um empréstimo no valor de R$ 7.000,00 deve ser liquidado em 18 prestações mensais, pelo Sistema Price, a uma taxa de juros de 36% *aa*. Determinar o valor da prestação.

Resolução: dados do problema: $PV = 7.000{,}00$; $n = 18$ meses; $i = 36\%\ aa = \dfrac{36\%aa}{12 meses} = 3\%\ am = 0{,}03\ am$; $PMT = ?$

Aplicando, diretamente a fórmula $PMT = PV \times \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$, você tem:

$$PMT = 7.000{,}00 \times \frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-18}} \quad \Rightarrow \quad PMT = 7.000{,}00 \times \frac{0{,}03}{1-(1{,}03)^{-18}} =$$

$$PMT = 7.000{,}00 \times \frac{0{,}03}{1-\ 0{,}58739} = 7.000{,}00 \times 0{,}07271 = 508{,}96.$$

Portanto, o valor da prestação é R$ 508,96.

Exemplo 4.10 O Banco Alfa emprestou R$ 60.000,00 à empresa Beta, liberados no ato, nas seguintes condições:

- taxa de juros = 48% ao ano;
- o empréstimo será amortizado em seis parcelas mensais pelo Sistema Price;
- IOF é de 1,25% do valor financiado, pago junto com as prestações; e
- prazo de carência: quatro meses com juros capitalizados neste período e incorporados ao saldo devedor.

Elaborar a planilha do empréstimo.

Resolução: dados do problema: $PV = 60.000{,}00$; $n = 6$ meses; $i = 48\%\ aa = \dfrac{48\%aa}{12 meses} = 4\%\ am = 0{,}04\ am$; $m = 4$ meses (juros capitalizados neste período).

Cálculo do IOF, $IOF = 1{,}25\%$ de $60.000{,}00 = 750{,}00$. Logo, o valor financiado será $PV = 60.000{,}00 + IOF = 60.750{,}00$.

Planilha do empréstimo (em R$):

Mês	P_t	A_t	J_t	PMT
0	60.750,00	–	–	–
1	63.180,00	–	–	–
2	65.707,20	–	–	–
3	68.335,49	–	–	–
4	71.068,91 (*)	–	–	–
5	60.354,43	10.714,48	2.842,76	13.557,24
6	49.211,37	11.143,06	2.414,18	13.557,24
7	37.622,58	11.588,79	1.968,46	13.557,24
8	25.570,24	12.052,34	1.504,90	13.557,24
9	13.035,81	12.534,43	1.022,81	13.557,24
10	0	13.035,81	521,43	13.557,24
Total	–	71.068,91	10.274,53	81.343,44

(*) O saldo devedor do mês 4 é $P_4 = 60.750,00 \times (1,04)^4 = 71.068,91$.

Exemplo 4.11 Um empréstimo de R$ 35.000,00 deverá ser amortizado em 48 meses, pelo Sistema Price, a uma taxa de juros de 3,75 % *am* e uma carência de 12 meses (juros capitalizados na carência e incorporados ao saldo devedor). Calcular:

a) o valor da 15a parcela de amortização das 48;

b) o valor da 25ª parcela de juros das 48; e

c) o valor do saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem 37 das 48.

Resolução: Dados do problema: $PV = 35.000,00$; $n = 48$ meses; $i = 3,75\%$ *am* $= 0,0375$ *am*; $m = 12$ meses (juros capitalizados neste período).

Inicialmente, você calcula o valor do empréstimo corrigido em 3,75% *am* até o vencimento do período da carência (12 meses), assim:

$P_{12} = 35.000,00 \times (1,0375)^{12} = 54.440,90$.

Este valor, R$ 54.440,90, será amortizado em 48 meses a 3,75% *am* pelo Sistema Price.

Agora, respondendo, temos:

a) $$A_{15} = \frac{54.440,90 \times 0,0375 \times (1+0,0375)^{15-1}}{(1+0,0375)^{48} - 1} = \frac{2.041,53 \times (1,0375)^{14}}{5,85368 - 1} =$$

$$A_{15} = \frac{2.041,53 \times 1,6743}{4,85368} = \frac{3.418,14}{4,85368} = 704,23.$$

Portanto, o valor da 15ª parcela de amortização das 48 é de R$ 704,23.

b) $$J_{25} = 54.440,90 \times 0,0375 \times \frac{1-(1+0,0375)^{-(48-25+1)}}{1-(1+0,0375)^{-48}} =$$

$$J_{25} = 2.041,53 \times \frac{1-(1,0375)^{-24}}{1-(1,0375)^{-48}} = 2.041,53 \times \frac{1-0,41332}{1-0,17083} =$$

$$J_{25} = 2.041,53 \times \frac{0,58668}{0,82917} = 2.041,53 \times 0,70755 = 1.444,49.$$

Portanto, o valor da 25ª parcela de juros das 48 é R$ 1.444,49.

c) $$P_{37} = 54.440,90 \times \frac{1-(1+0,0375)^{-(48-37)}}{1-(1+0,0375)^{-48}} = 54.440,90 \times \frac{1-(1,0375)^{-11}}{1-(1,0375)^{-48}} =$$

$$P_{37} = 54.440,90 \times \frac{1-0,66701}{1-0,17083} = 54.440,90 \times \frac{0,33299}{0,82917} = 21.863,38.$$

Portanto, o valor do saldo devedor após o pagamento da prestação de ordem 37 das 48 é R$ 21.863,38.

Chegou a hora de verificar como anda seu aprendizado. Resolva as atividades propostas. Caso tenha dúvidas, entre em contato com o seu tutor.

Atividades de aprendizagem – 2

1) Um equipamento no valor de R$ 90.000,00 está sendo financiado pelo banco Boa Sorte para pagamento em seis anos. A taxa de juros contratada é de 24% *aa* pelo Sistema Price. O Banco Boa Sorte concede ainda uma carência de três anos para início dos pagamentos, sendo os juros cobrados neste período. Elaborar a planilha deste financiamento.

2) Um empréstimo no valor de R$ 4.000,00 deve ser liquidado em 12 prestações mensais pela Tabela Price a uma taxa de juros de 2,45% *am*. O valor do IOF é de 1,25% do valor emprestado pago junto com as prestações, e a Taxa de Abertura de Crédito (TAC) é de R$ 350,00, também paga junto com as prestações. Calcular o valor da prestação.

3) O senhor Sabe Tudo financiou R$ 95.000,00 na compra de sua casa, sendo adotado o Sistema Price à taxa de 2,5% *am* para pagamento em 144 meses. Determine o estado da dívida no 87º mês, isto é, o valor do saldo devedor, valor da amortização, valor do juro e o valor da prestação no mês 87.

4) O senhor Pardal comprou um carro 0 km, financiando R$ 15.000,00 para pagamento em 24 prestações mensais iguais à taxa de juros 1% *am*. Após pagar 12 prestações, resolveu liquidar a dívida. Determinar quanto o senhor Pardal pagou para liquidar a dívida à mesma taxa de juros.

5) Um empréstimo foi contratado para ser amortizado em 36 prestações mensais pelo Sistema Price à taxa de juros de 2,5% *am*. Sabendo-se que o valor das amortizações acumuladas até o 15º mês é R$ 18.487,28, calcular o valor do empréstimo.

Saiba mais...

Para aprofundar os conceitos estudados nesta Unidade, consulte:
HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática Financeira*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.
SAMANEZ, Carlos Patricio. *Matemática Financeira*: aplicações à análise de investimentos. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.
VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática Financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

RESUMO

Nesta Unidade, você estudou os dois principais sistemas de amortização de empréstimos e financiamentos utilizados nos mercados financeiro e comercial de nosso país, e entendeu que os dois sistemas de amortização diferem pelo critério de devolução do principal tomado emprestado.

Você aprendeu também a elaborar a planilha do empréstimo ou o plano de amortização (com e sem carência), bem como a calcular o saldo devedor, a parcela de amortização, a parcela de juros, e o valor da prestação do sistema de amortização constante e do Sistema Price em um período qualquer.

Respostas das atividades de aprendizagem

Atividades de aprendizagem 1

1)

Sem.	P_t	A	J_t	PMT_t
0	80.000,00	–	–	–
1	80.000,00	–	5.600,00	5.600,00
2	80.000,00	–	5.600,00	5.600,00
3	64.000,00	16.000,00	5.600,00	21.600,00
4	48.000,00	16.000,00	4.480,00	20.480,00
5	32.000,00	16.000,00	3.360,00	19.360,00
6	16.000,00	16.000,00	2.240,00	18.240,00
7	0	16.000,00	1.120,00	17.120,00
Total	–	80.000,00	28.000,00	108.000,00

2) a) R$ 3.966,67 e R$ 1.016,46.

b) R$ 139.329,17.

c) R$ 179.987,50.

d) R$ 59.500,00.

3) R$ 21.239,01.

4) a) R$ 4.429,42.

b) R$ 1.788,80.

c) R$ 66.185,70.

d)R$ 34.072,43.

Atividades de aprendizagem 2

1)

Ano	P_t	A_t	J_t	PMT
0	90.000,00	–	–	–
1	90.000,00	–	21.600,00	21.600,00
2	90.000,00	–	21.600,00	21.600,00
3	90.000,00	–	21.600,00	21.600,00
4	81.803,33	8.196,67	21.600,00	29.796,67
5	71.639,46	10.163,87	19.632,80	29.796,67
6	59.036,26	12.603,20	17.193,47	29.796,67
7	43.408,29	15.627,97	14.168,70	29.796,67
8	24.029,61	19.378,68	10.417,99	29.796,67
9	0	24.029,61	5.767,11	29.796,67
Total	–	90.000,00	153.580,07	243.580,07

2) R$ 427,65.

3) Saldo devedor = R$ 73.857,23; Amortização = R$ 583,80; Juro = R$ 1.861,03; Prestação = R$ 2.444,83.

4) R$ 7.947,23.

5) R$ 59.076,04.

Chegamos ao final da Unidade 4. A partir deste momento, passaremos a estudar a correção monetária. Não deixe de fazer as atividades que estão sendo disponibilizadas ao longo das Unidades. A elaboração das atividades de forma correta é a garantia de que você entendeu os conceitos apresentados.